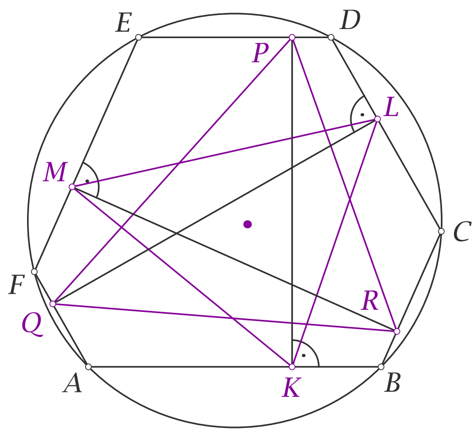
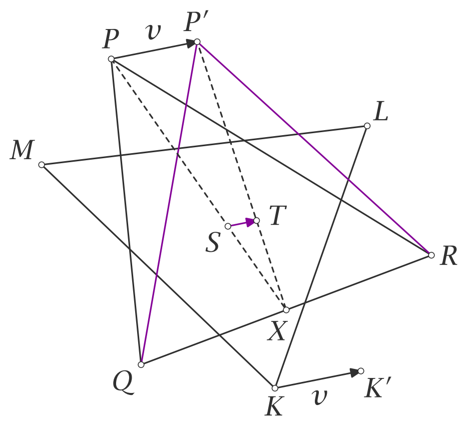
Zadanie 11.

W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wpisanym w okrąg przeciwległe boki są równoległe. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, CD, EF. Proste przechodzące przez punkty K, L, M i prostopadłe odpowiednio do boków AB, CD, EF przecinają odcinki DE, FA, BC odpowiednio w punktach P, Q, R. Dowieść, że środki ciężkości trójkątów KLM i PQR pokrywają się.



Rozwiązanie

Wykorzystamy następującą obserwację. Przypuśćmy, że środki ciężkości trójkątów KLM i PQR pokrywają się. Niech K' i P' będą obrazami odpowiednio punktów K i P w przesunięciu o ten sam wektor v. Wówczas środki ciężkości trójkątów $K'LM$ i $P'QR$ także pokrywają się.



Istotnie: niech X będzie środkiem odcinka QR, a S i T odpowiednio środkami ciężkości trójkątów PQR i $P'QR$. Wtedy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{3}v$. Przesuwając zatem wierzchołek P o wektor v, środek ciężkości trójkąta PQR przesunie się o wektor $\frac{1}{3}v$. Podobnie, przesuwając wierzchołek K o wektor v, środek ciężkości trójkąta KLM przesunie się również o wektor $\frac{1}{3}v$.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Niech K, L, M oraz P, Q, R będą odpowiednio środkami odcinków AB, CD, EF oraz BC, DE, FA. Wtedy środki ciężkości trójkątów KLM i PQR pokrywają się, gdyż

$$\frac{1}{3}(\vec{K}+\vec{L}+\vec{M}) = \frac{1}{6}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}+\vec{F}) = \frac{1}{3}(\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R})$$

gdzie $\vec{X}$ oznacza wektor $\overrightarrow{OX}$ dla dowolnie wybranego punktu O. Następnie przesuwamy środki boków sześciokąta $ABCDEF$ do danych w treści zadania punktów K, L, M oraz P, Q, R (wzdłuż wektorów równoległych do odpowiednich boków sześciokąta). Wykorzystując powyższą obserwację, uzyskujemy tezę.

Zadanie rozwiązali: Zuzanna Gierej (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).