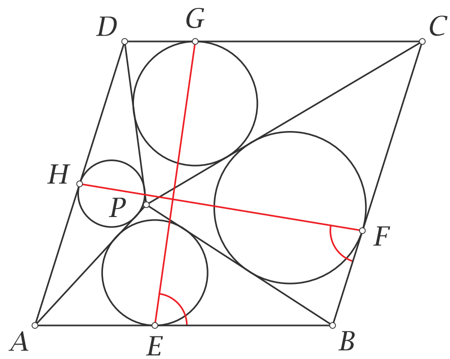
Zadanie 9.

Punkt P leży wewnątrz rombu $ABCD$. Okręgi wpisane w trójkąty PAB, PBC, PCD, PDA są styczne do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach E, F, G, H. Udowodnić, że kąty BEG i BFH są równe.



Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że $BE+DG=BF+DH$.

Oznaczmy przez a, b, c, d odpowiednio długości odcinków PA, PB, PC, PD. Ponadto niech x będzie długością boku rombu.

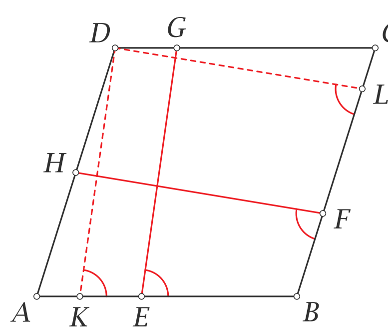
Długość odcinka stycznego łączącego wierzchołek trójkąta z punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt jest różnicą połowy obwodu trójkąta oraz przeciwległego boku. W związku z tym

$$BE+DG=\frac{b+x-a}{2}+\frac{d+x-c}{2}=\frac{2x+b+d-a-c}{2}.$$

Analogicznie obliczamy

$$BF+DH=\frac{b+x-c}{2}+\frac{d+x-a}{2}=\frac{2x+b+d-a-c}{2},$$

Skąd bezpośrednio otrzymujemy $BE+DG=BF+DH$.



Niech K i L będą takimi punktami, że czworokąty $DGEK$ i $DHFL$ są równoległobokami. Wtedy $BK=BE+DG=BF+DH=BL$, a więc także

$AK = CL$. Stąd wynika, że trójkąty AKD i CLD są przystające (cecha *bok–kąt–bok*). Ostatecznie więc $\sphericalangle BEG = \sphericalangle BKD = \sphericalangle BLD = \sphericalangle BFH$.

Zadanie rozwiązali: Zuzanna Gierej (Warszawa), Milena Kwiatkowska (Warszawa), Zofia Makowska (Warszawa), Zuzanna Mosionek (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).