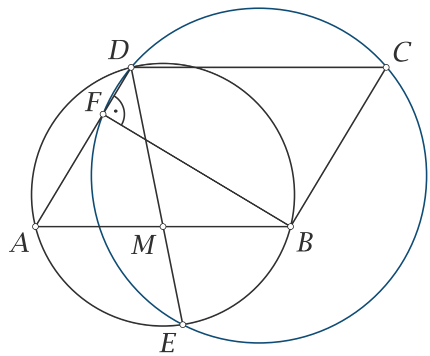
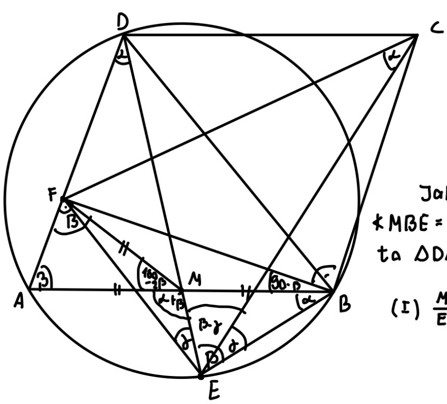
Zadanie 8.

W równoległoboku $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AB. Prosta DM przecina okrąg opisany na trójkącie ABD po raz drugi w punkcie E. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Dowieść, że punkty C, D, E, F leżą na jednym okręgu.



Rozwiązanie *(Zuzanna Mosionek, Warszawa)*



Niech $\angle ADE = \alpha$; $\angle DAB = \beta$

$\angle ABE = \angle ADE = \alpha$ oraz $\angle DEB = \angle DAB = \beta$

(kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku)

Jako, ze $\angle EMB = \angle AMD$ (kąty wierzchołkowe), $\angle MBE = \angle ABE = \angle ADE = \angle ADM$ i $\angle MEB = \angle DEB = \angle DAB = \angle DAM$, to $\Delta DAM \sim \Delta BEM$ (kkk)

$$\text{(I)} \quad \frac{ME}{EB} = \frac{MA}{AD}$$

ΔABF jest prostokątny, a M jest środkiem jego przeciwprostokątnej $\Rightarrow AM = BM = FM$, $\angle AFM = \angle FAM = \beta$, $\angle AMF = 180° - \angle AFM - \angle FAM = 180° - 2\beta$, $\angle ABF = 90° - \angle FAB = 90° - \beta$

$\angle AME = \angle MBE + \angle MEB = \alpha + \beta$ (kąt zewnętrzny)

Wiem, ze $FB \perp AD$ oraz $AD \parallel BC \Rightarrow FB \perp BC \Rightarrow \angle FBC = 90°$

Stąd $\angle FME = \angle FMA + \angle AME = 180° - 2\beta + \alpha + \beta = 180° + \alpha - \beta$ oraz $\angle CBE = \angle CBF + \angle FBA + \angle ABE = 90° + 90° - \beta + \alpha = 180° + \alpha - \beta \Rightarrow \angle FME = 180° + \alpha - \beta = \angle CBE$

Jako, ze $\frac{ME}{EB} \overset{\text{(I)}}{=} \frac{MA}{AD} = \frac{MF}{AD} = \frac{MF}{BC}$ i $\angle FME = \angle CBE \Rightarrow \Delta FME \sim \Delta CBE \Rightarrow \frac{ME}{EB} = \frac{FE}{CE}$ i $\angle FEM = \angle CEB = \gamma$

Stąd $\Delta FEC \sim \Delta MEB$, ponieważ $\frac{ME}{EB} = \frac{FE}{EC}$ i $\angle MEB = \beta = \beta - \gamma + \gamma = \angle MEC + \angle FEM = \angle FEC$

Oznacza to, ze $\angle FCE = \angle MBE = \alpha$

Jako, ze $\angle FCE = \alpha = \angle FDE \Rightarrow F, D, C, E$ leżą na jednym okręgu (z tw. odwrotnego do tw. o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku)

Zadanie rozwiązali: Zuzanna Gierej (Warszawa), Milena Kwiatkowska (Warszawa), Zuzanna Mosionek (Warszawa), Szymon Michalik (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).