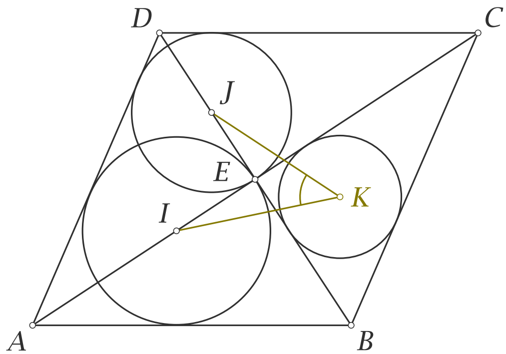
Zadanie 7.

Przekątne AC i BD rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkty I, J i K są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABD, CDA i BCE. Dowieść, że miara kąta IKJ jest równa 45°.



Rozwiązanie *(Szymon Michalik, Warszawa)*

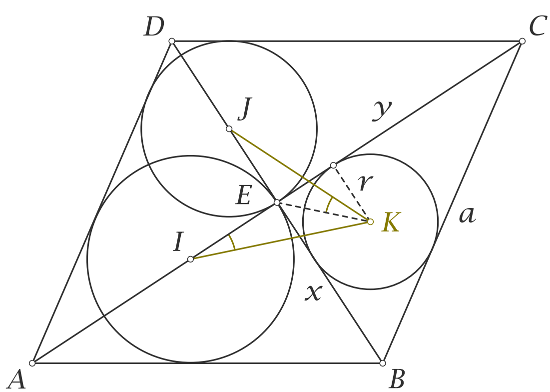
Wykażemy najpierw, że trójkąty JEK i KEI są podobne.

Oczywiście $\sphericalangle JEK = 135^\circ = \sphericalangle KEI$. Aby dokończyć dowód wspomnianego podobieństwa, wystarczy dowieść, że

$$\frac{EJ}{EK} = \frac{EK}{EI},$$

czyli $EK^2 = EJ \cdot EI$.

Oznaczmy przez x i y odpowiednio długości odcinków EB i EC. Niech ponadto a będzie długością boku rombu. Wyznaczymy długości odcinków EI, EJ oraz EK w zależności od x, y i a.



Obliczając na dwa sposoby pole trójkąta ABD, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot (2a + 2x) \cdot EI,$$

skąd dostajemy

$$EI = \frac{xy}{a+x}\,.$$

Analogicznie obliczamy długość odcinka EJ:

$$EJ = \frac{xy}{a+y}\,.$$

Z kolei długość odcinka EK jest równa $r\sqrt{2}$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BEC. Stąd, obliczając na dwa sposoby pole trójkąta BEC, uzyskujemy

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(x+y+a)r\,.$$

Uwzględniając równość $EK = r\sqrt{2}$, dostajemy

$$EK = \frac{xy\sqrt{2}}{x+y+a}\,.$$

Podstawiamy uzyskane wartości do zależności $EK^2 = EJ\cdot EI$, którą chcemy udowodnić. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{2x^2y^2}{(a+x+y)^2} = \frac{x^2y^2}{(x+a)(y+a)}\,.$$

Zależność ta sprowadza się do

$$2(x+a)(y+a) = (x+y+a)^2\,.$$

Po wymnożeniu nawiasów i zredukowaniu wyrazów podobnych dostajemy $a^2 = x^2 + y^2$. Jest to oczywiście prawda na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta BEC.

Wiedząc już, że trójkąty JEK i KEI są podobne, możemy napisać następujące równości kątów:

$$\sphericalangle IKJ = \sphericalangle IKE + \sphericalangle EKJ = \sphericalangle IKE + \sphericalangle EIK = 180^\circ - \sphericalangle IEK = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ\,,$$

co kończy dowód.

Uwaga

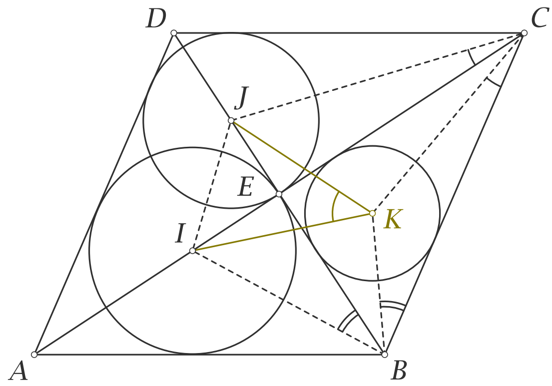
Zadanie to można rozwiązać, powołując się własności punktów izogonalnych w czworokącie. Wykorzystamy następujące twierdzenie:

Punkt P leżący wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ ma punkt izogonalny w tym czworokącie wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ$.

Z punktami izogonalnymi, ich własnościami oraz dowodem powyższego twierdzenia można się zapoznać w książeczce: W. Pompe, *Wokół obrotów*, wydanie drugie (rozdział 5, twierdzenie 5.15).

W rozwiązaniu zadania wykorzystamy powyższe twierdzenie do czworokąta $BCJI$. Punkt E spełnia założenia tego twierdzenia, wobec czego istnieje punkt izogonalny do punktu E w tym czworokącie. Z równości kątów

$\sphericalangle JCE = \sphericalangle BCK$ oraz $\sphericalangle IBE = \sphericalangle CBK$ wynika, że punktem izogonalnym do E w czworokącie $BCJI$ jest K. Wykorzystując ponownie powyższe twierdzenie, lecz tym razem dla punktu K, otrzymujemy $\sphericalangle BKC + \sphericalangle IKJ = 180°$. Ale $\sphericalangle BKC = 135°$, gdyż $\sphericalangle BEC = 90°$. Stąd $\sphericalangle IKJ = 45°$.



Zadanie rozwiązali: Zuzanna Gierej (Warszawa), Zuzanna Mosionek (Warszawa), Szymon Michalik (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).