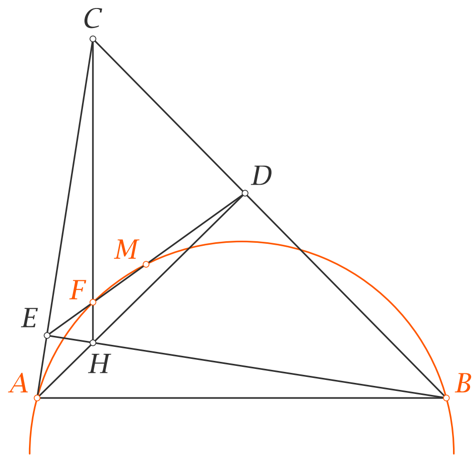
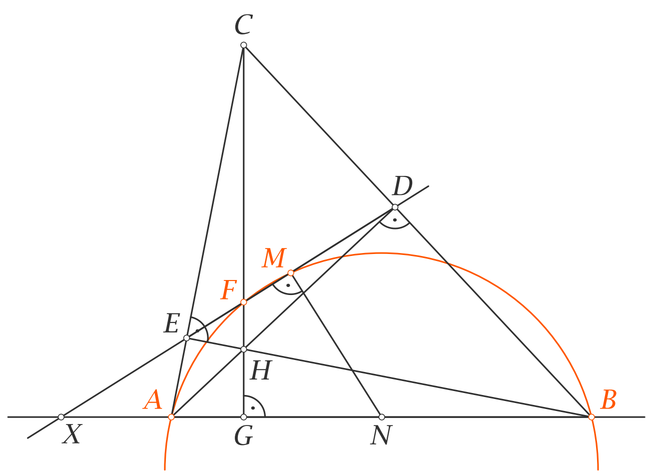
Zadanie 6.

W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H. Odcinki DE i CH przecinają się w punkcie F. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Wykazać, że punkty A, B, M, F leżą na jednym okręgu.



Rozwiązanie

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych AB i DE. Niech G będzie spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C, a punkt N środkiem odcinka AB.



Ponieważ kąty ADB i AEB są proste, więc punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu, którego środkiem jest punkt N. Punkt N leży więc na symetralnej odcinka DE, wobec czego proste MN i DE są prostopadłe. Stąd wniosek, że na czworokącie $FGNM$ można odpisać okrąg. To oznacza, że

$XF \cdot XM = XG \cdot XN$.

Również punkty D, E, G, N leżą na jednym okręgu, gdyż jest to okrąg dziewięciu punktów trójkąta ABC. Stąd $XG \cdot XN = XE \cdot XD$.

Wykorzystując ponownie obserwację, że punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu, uzyskujemy $XE \cdot XD = XA \cdot XB$.

Podsumowując uzyskane równości, otrzymujemy $XF \cdot XM = XA \cdot XB$, co oznacza, że punkty A, B, M, F leżą na jednym okręgu.

Zadanie rozwiązali: Zuzanna Gierej (Warszawa), Milena Kwiatkowska (Warszawa), Szymon Michalik (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).

Otrzymaliśmy ponadto jedno niekompletne rozwiązanie.