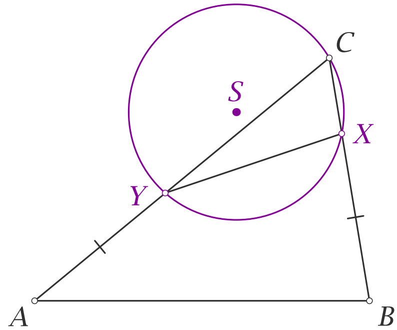
Zadanie 5.

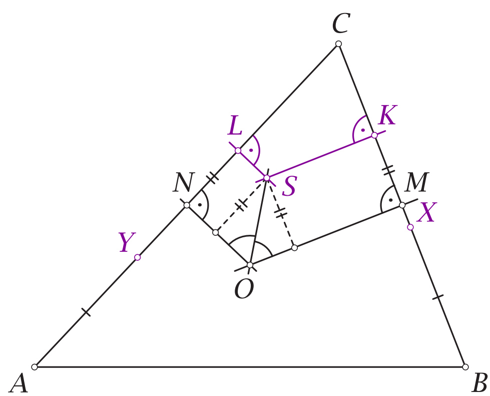
Dany jest trójkąt ABC. Na bokach BC i AC tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty X i Y, że długości odcinków BX i AY są równe. Udowodnić, że środek S okręgu opisanego na trójkącie CXY leży na pewnej ustalonej prostej, niezależnej od wyboru punktów X i Y.



Rozwiązanie *(Zofia Makowska, Warszawa)*

Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki odcinków BC i CA. Symetralne tych odcinków przecinają się w punkcie O, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Podobnie, niech K i L będą odpowiednio środkami odcinków XC i YC. Symetralne tych odcinków przecinają się w punkcie S.



Wówczas $KM = CM - CK = \frac{1}{2}CB - \frac{1}{2}CX = \frac{1}{2}BX$. Analogicznie dowodzimy, że $LN = \frac{1}{2}AY$, a ponieważ $BX = AY$, to $KM = LN$. Stąd wniosek, że odległości punktu S od ramion kąta MON są równe, co oznacza, że punkt S leży na dwusiecznej tego kąta. To kończy dowód.

Zadanie rozwiązali: Zuzanna Gierej (Warszawa), Jakub Kurdej (Warszawa), Milena Kwiatkowska (Warszawa), Zofia Makowska (Warszawa), Szymon Michalik (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).