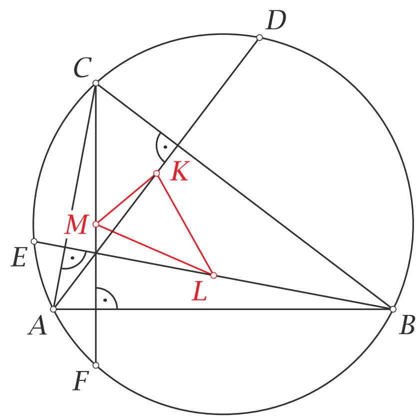
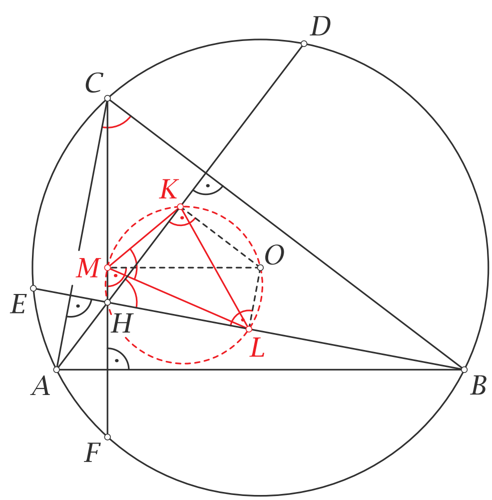
Zadanie 3.

Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o. Proste przechodzące przez wierzchołki A, B, C i prostopadłe odpowiednio do boków BC, CA, AB przecinają okrąg o odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami cięciw AD, BE, CF. Wykazać, że trójkąty ABC i KLM są podobne.



Rozwiązanie

Oznaczmy przez O środek danego okręgu, a przez H — punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC.



Symetralna dowolnej cięciwy okręgu przechodzi przez środek tego okręgu, skąd wynika, że proste OK, OL, OM są prostopadle odpowiednio do cięciw AD, BE, CF. W konsekwencji, punkty K, L, M leżą na okręgu o średnicy OH. Kąty KML i KHL są więc równe jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Wobec tego $\sphericalangle KML = \sphericalangle KHL = 180^\circ - \sphericalangle DHE = \sphericalangle ACB$.

Analogicznie dowodzimy, że kąty przy wierzchołkach K i L trójkąta KLM są równe odpowiednio kątom przy wierzchołkach A i B trójkąta ABC. Trójkąty ABC i KLM są więc podobne na mocy cechy *kąt–kąt–kąt*.

Zadanie rozwiązali: Maciej Dębski (Warszawa), Zuzanna Gierej (Warszawa), Rafał Karpiński (Warszawa), Jan Koziarski (Warszawa), Ignacy Kramarski (Radom), Jakub Kurdej (Warszawa), Milena Kwiatkowska (Warszawa), Zofia Makowska (Warszawa), Zuzanna Mosionek (Warszawa), Szymon Michalik (Warszawa), Miłosz Piekot (Wrocław), Kamil Sarnecki (Warszawa), Michał Smółko (Warszawa).

Wszystkie przesłane rozwiązania opierały się na tym samym pomyśle (rozważenia okręgu o średnicy OH) i były bardzo podobne do powyższego.