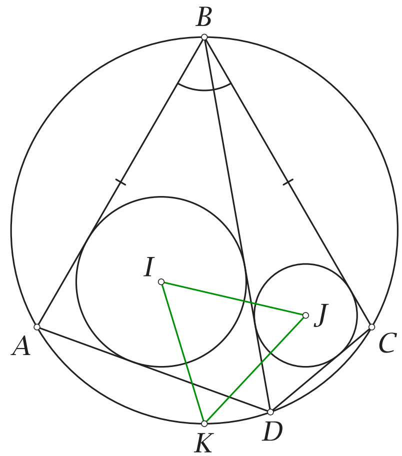
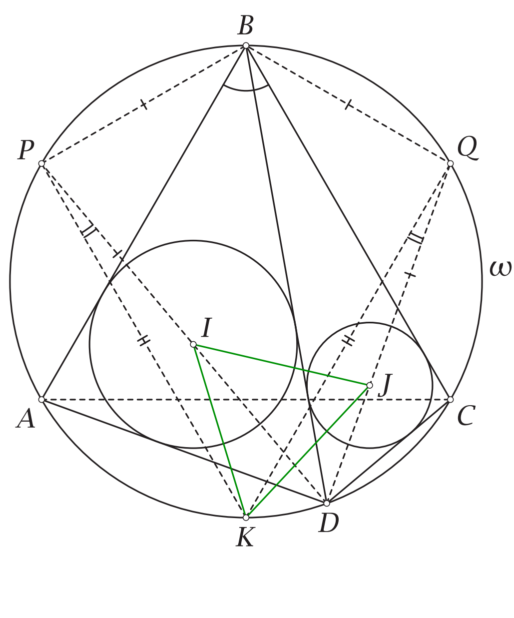
Zadanie 2.

Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = BC$ oraz kąt ABC ma miarę 60°, jest wpisany w okrąg. Punkt K jest środkiem krótszego łuku AC tego okręgu. Punkty I, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD i CBD. Dowieść, że trójkąt IJK jest równoboczny.



Rozwiązanie *(Mikołaj Michalik, Warszawa)*

Oznaczmy przez P i Q odpowiednio punkty przecięcia półprostych DI i DJ z okręgiem ω opisanym na czworokącie $ABCD$. Półproste DI i DJ to dwusieczne odpowiednio kątów ADB i CDB, więc P i Q to środki odpowiednio (krótszych) łuków AB i BC okręgu ω.



Zauważmy, że trójkąt ABC jest równoboczny, więc

$$\sphericalangle BDJ = \frac{1}{2}\sphericalangle BDC = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 30^\circ .$$

Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle BDI = 30^\circ$. Zatem łuki okręgu ω, na których oparte są kąty BDJ i BDI są równej długości. Stąd wniosek, że $PB = QB$.

Z twierdzenia o trójliściu (p. komentarz niżej) wiemy, że $PI = PB$ oraz $QJ = QB$. Wobec tego, skoro $PB = QB$, to $PI = QJ$.

Ponadto krótsze łuki PK oraz KQ okręgu ω są równej długości (każdy z tych łuków ma długość równą $\frac{1}{3}$ długości okręgu ω), skąd wynika, że $PK = QK$.

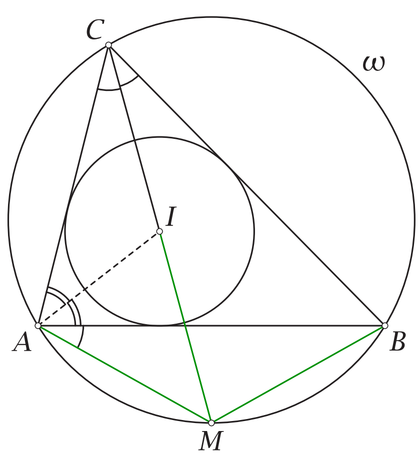
Wreszcie $\sphericalangle KPI = \sphericalangle KQJ$, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku KD okręgu ω. Wobec tego trójkąty KIP oraz KJQ są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd wynika, że $IK = KJ$. Z przystawania tego wnioskujemy także, że $\sphericalangle PKI = \sphericalangle QKJ$. W związku z tym otrzymujemy $\sphericalangle IKJ = \sphericalangle PKQ = 60^\circ$.

Trójkąt IJK jest więc równoramienny i jeden jego kąt ma miarę 60°, jest więc to trójkąt równoboczny.

Komentarz

Niemal wszystkie przesłane rozwiązania wykorzystywały następującą bardzo użyteczną własność środka okręgu wpisanego w trójkąt, zwaną potocznie *twierdzeniem o trójliściu:*

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Półprosta CI przecina okrąg ω opisany na trójkącie ABC w punkcie M. Wówczas $AM = BM = IM$.



Oto dowód tej własności.

Równość $AM = BM$ wynika z tego, że CM jest dwusieczną kąta ACB, wobec czego punkt M jest środkiem łuku AB (nie zawierającego punktu C) okręgu ω. Stąd cięciwy AM i BM są równej długości. Dalej zauważamy, że

$$\sphericalangle AIM = \sphericalangle IAC + \sphericalangle ICA = \sphericalangle IAB + \sphericalangle MAB = \sphericalangle IAM\,,$$

skąd wynika, że $AM = IM$.

Zadanie rozwiązali: Kamil Adamczyk (Katowice), Andrzej Burszewski (Warszawa), Zuzanna Gierej (Warszawa), Piotr Kucharczyk (Kraków), Milena Kwiatkowska (Warszawa), Antoni Łuczak (Warszawa), Jarosław Makucha (Kraków), Mikołaj Michalik (Warszawa), Katarzyna Pasierbiewicz (Lublin), Piotr Wielgolewski (Warszawa). Ponadto pięć osób przesłało niepoprawne lub niepełne rozwiązania.