Wybrane zadania z kombinatoryki

Waldemar Pompe

1. W każde pole szachownicy o wymiarach 10×10 wpisano jedną z liczb: 0, 1, lub -1. Następnie obliczono sumę liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i na obu przekątnych. Udowodnij, że co najmniej dwie z tych sum są równe.

2. W pewnej klasie 34 uczniów rozwiązywało zadania testowe. Nikt nie zrobił więcej niż 10 błędów. Wykaż, że co najmniej 4 uczniów popełniło taką samą liczbę błędów.

3. Danych jest 78 dodatnich liczb całkowitych trzycyfrowych. Udowodnij, że spośród tych liczb można wybrać cztery, które mają taką samą sumę cyfr.

4. Na przyjęciu spotkało się $2n$ osób, przy czym n spośród nich miało wśród pozostałych dokładnie dwóch znajomych, a pozostałych n — dokładnie trzech znajomych. Dla jakich wartości n taka sytuacja jest możliwa?

5. Józek, Zbyszek i Władek rozgrywają serię meczy w tenisa stołowego. Gdy dwie osoby rozgrywają mecz, trzecia przygląda się ich grze. Po zakończonym meczu przegrana osoba staje się widzem, a dwie pozostałe rozgrywają kolejny mecz. Okazało się, że Józek rozegrał 10 meczów, Zbyszek 15 meczów, a Władek 17 meczów. Kto przegrał w drugim meczu? Odpowiedź uzasadnij.

6. Każdy punkt okręgu pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny o wierzchołkach tego samego koloru.

7. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach tego samego koloru.

8. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt prostokątny równoramienny o wierzchołkach tego samego koloru.

9. Na przyjęciu spotkało się 6 osób. Wiadomo, że co najmniej 10 par spośród tych osób to pary osób znajomych. Wykaż, że istnieje na tym przyjęciu trójka znajomych.

10. Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykazać, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

11. Na przyjęciu spotkało się 101 osób. Okazało się, że nie istnieje taka trójka osób, wśród których jest dokładnie jedna para osób nieznajomych. (Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna B, to osoba B zna A.) Wykaż, że na przyjęciu istnieje takich 11 osób, wśród których każde dwie się znają lub takich 11 osób, wśród których żadne dwie się nie znają.

12. Na okręgu zaznaczono n punktów. Następnie narysowano wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Zakładając, że żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie, wyznacz liczbę punktów przecięcia tych cięciw (leżących wewnątrz okręgu).

13. Na okręgu zaznaczono n punktów. Następnie narysowano wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Zakładając, że żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie, wyznacz liczbę obszarów, na które zostało podzielone wnętrze tego okręgu.