

Zadanie 6.

Mamy do dyspozycji prostokąty o wymiarach 1×2 , 1×3 , 1×4 , ..., po jednym każdej wielkości. Czy spośród tych prostokątów można wybrać pewną ich liczbę tak, by dało się z nich ułożyć kwadrat? Odpowiedź uzasadnij. (Prostokąty nie mogą na siebie nachodzić i muszą wypełniać szczelnie cały kwadrat.)

Rozwiązanie (Hanna Makowska, Warszawa)

Wykażemy, że nie jest to możliwe.

Przypuśćmy, że udało się nam wybrać pewną liczbę prostokątów, z których ułożyliśmy kwadrat. Wśród tych prostokątów jest jeden największy. Przyjmijmy, że jego wymiary wynoszą $1 \times n$.

Aby mieścił się on w ułożonym kwadracie, kwadrat ten musi być przynajmniej wielkości $n \times n$. Zatem pole tego kwadratu wynosi co najmniej n^2 .

Pozostała część kwadratu ma pole równe co najmniej $n^2 - n$ i jest pokryta prostokątami

$$1 \times 2, \quad 1 \times 3, \quad \dots, \quad 1 \times (n - 1)$$

(wszystkimi lub niektórymi z nich). Jednak każdy z tych prostokątów ma pole mniejsze od n , więc ich łączne pole jest mniejsze od

$$(n - 2) \cdot n = n^2 - 2n$$

czyli także mniejsze od n^2 . Uzyskaliśmy sprzeczność.

Zadanie rozwiązali: Zofia Bis (Warszawa), Zofia Budas (Tomaszowo), Hugo Hankus (Kraków), Mikołaj Kowal (Kraków), Kinga Kucia (Krosno), Hanna Makowska (Warszawa), Aleksandra Mazur (Warszawa), Tobiasz Nagłowski (Warszawa), Jakub Olszewski (Nowa Sól), Krzysztof Stec (Sędziszów Małopolski), Adam Tomaka (Strzyżów), Aleksander Witkowski (Warszawa).

Otrzymaliśmy ponadto 5 niepoprawnych, niepełnych lub nieregularnych rozwiązań.