

Zadanie 4.

Liczba całkowita x oraz liczba pierwsza p spełniają równanie

$$x^2 + 12x + p = 0.$$

Wyznacz wszystkie takie pary liczb (x, p) .

Rozwiązanie (Anna Zaleska, Warszawa)

Zauważmy, że $x < 0$, gdyż jeśli $x \geq 0$, to wtedy $x^2 + 12x \geq 0$. W konsekwencji mielibyśmy $x^2 + 12x + p > 0$ i równanie nie byłoby spełnione.

Dane równanie możemy teraz zapisać w postaci $x^2 + 12x = -p$. Po podzieleniu obu stron przez x (już wiemy, że $x \neq 0$) otrzymujemy

$$x + 12 = -\frac{p}{x}.$$

Ponieważ x jest liczbą całkowitą, więc liczba stojąca po lewej stronie jest całkowita. Oznacza to, że liczba $-\frac{p}{x}$ jest też całkowita. Ale wiemy, że p jest liczbą pierwszą, a x ujemną liczbą całkowitą, więc możliwe są tylko dwa przypadki: $x = -p$ lub $x = -1$.

a) Jeśli $x = -p$, to $p = -x$. Po podstawieniu do danego równania mamy $x^2 + 12x - x = 0$, czyli $x^2 = -11x$. Ponieważ $x \neq 0$, więc po podzieleniu obu stron przez x otrzymujemy $x = -11$ i w konsekwencji $p = 11$.

b) Jeśli $x = -1$, to $(-1)^2 + 12 \cdot (-1) + p = 0$, skąd $p = 11$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskane pary (x, p) , czyli $(-11, 11)$ oraz $(-1, 11)$ spełniają warunki zadania.

Zadanie rozwiązali: Julia Abramczyk (Gdańsk), Zofia Bis (Warszawa), Zofia Budas (Tomaszowo), Jakub Chodkiewicz (Mińsk Mazowiecki), Kornel Jagodziński (Leszno), Barbara Kamrowska (Warszawa), Mikołaj Kowal (Kraków), Kinga Kucia (Krosno), Hanna Makowska (Warszawa), Aleksandra Mazur (Warszawa), Damian Mech (Ząbki), Wiktor Misztal (Cisie), Tobiasz Nagłowski (Warszawa), Jakub Olszewski (Nowa Sól), Antoni Piesiak (Warszawa), Marta Piotrowska (Józefów), Krzysztof Stec (Sędziszów Małopolski), Adam Słobodzian (Nysa), Mateusz Sobański (Myślibórz), Łukasz Sulowski (Warszawa), Kinga Szczawińska (Halinów), Hanna Szubertowska (Kościelec), Adam Tomaka (Strzyżów), Aleksander Witkowski (Warszawa), Anna Zaleska (Warszawa), Adam Zaleski (Warszawa).

Otrzymaliśmy ponadto 7 niepoprawnych lub niepełnych rozwiązań.