

## Czy to kwadrat?

1. Liczba pierwsza 3 ma tę własność, że jak dodamy do niej 1, to otrzymamy kwadrat liczby całkowitej. Czy istnieje jeszcze jedna liczba pierwsza o tej własności?
2. Liczba  $8 = 2^3$  ma tę własność, że jak dodamy do niej 1, to otrzymamy kwadrat liczby całkowitej. Czy istnieje jeszcze jedna liczba będąca trzecią potęgą liczby pierwszej o tej własności?
3. Liczba  $4 = 2^2$  ma tę własność, że jak dodamy do niej 5, to otrzymamy kwadrat liczby całkowitej. Czy istnieje jeszcze jedna liczba będąca potęgą liczby 2 (o wykładniku naturalnym) oraz mająca tę własność?
4. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $k$ , dla których poniższa liczba jest kwadratem liczby całkowitej.  
(a)  $3^k - 1$ ,            (b)  $7^k + 42$ .
5. Cyfrą jedności pewnej liczby naturalnej jest 4, a pozostałe cyfry są nieparzyste. Liczba ta jest co najmniej dwucyfrowa. Wykaż, że liczba ta nie jest kwadratem liczby całkowitej.
6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $m \geq 1$ , dla których liczba
$$1! + 2! + 3! + \dots + m!$$
jest kwadratem liczby naturalnej.  
*Uwaga:* Symbol  $n!$  oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do  $n$ , np.  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ .
7. Czy istnieją dwie kolejne dodatnie liczby całkowite, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.
8. Dodatnie liczby całkowite  $a, b$  spełniają warunek  $a - b = 2$ . Wykaż, że iloczyn  $ab$  nie jest kwadratem liczby całkowitej.
9. Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których liczba  $n^2 + 3n + 1$  jest kwadratem liczby całkowitej.
10. Dane są takie dodatnie liczby całkowite  $a, b$ , dla których obie liczby
$$a^2 + 2b + 1 \quad \text{oraz} \quad b^2 + 2a + 1$$
są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że  $a = b$ .

11. Dodatnie liczby całkowite  $a, b, c$  spełniają warunek

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Wykaż, że liczba  $a^2 + b^2 + c^2$  jest kwadratem liczby całkowitej.

12. Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest kwadratem liczby całkowitej.
13. Dodatnia liczba całkowita  $a$  ma dokładnie 75 dodatnich dzielników (wliczając 1 oraz  $a$ ). Liczba  $b$  ma dokładnie 45 dodatnich dzielników (wliczając 1 oraz  $b$ ). Czy liczba  $ab$  może mieć dokładnie 1234 różnych dzielników (wliczając 1 oraz  $ab$ )?
14. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od 1 do 1000, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez 3 itd. Ogólniej, kolejne,  $k$ -te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez  $k$ . Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik 1000 razy?